Um estudo de Cinemática

"Meu objetivo é expor uma ciência
muito nova que trata de um tema
muito antigo. Talvez nada na
natureza seja mais antigo
que o movimento..."

Galileu Galilei

1. Introdução

Neste texto focaremos nossa atenção na Cinemática, mais especificamente, nos conceitos necessários para a sua abordagem matemática e para a análise gráfica dos movimentos que se pretende representar. Como sugerem as palavras de Galileu no início, parece razoável iniciarmos nossa discussão pelo conceito-chave de **movimento**.

No dia-a-dia costuma-se associar a idéia de movimento a tudo que esteja em constante mudança, atividade, animação, agitação, evolução, desenvolvimento, enfim, à vida. Entretanto, em Física, a idéia de movimento assume um significado bastante restrito, qual seja: *a variação, em função do tempo, da posição de um corpo em relação a outro corpo que serve de referência*. Dito desta maneira, o conceito de movimento embora restrito, carece de precisão. A fim de esclarecermos nosso objeto de estudo, é necessário explicitar o que se entende por posição, corpo e corpo que serve de referência. Estes conceitos-chave, juntamente com os de distância percorrida, deslocamento, velocidade, trajetória, aceleração, tempo e referencial constituem o arcabouço conceitual necessário para a descrição cinemática do movimento de corpos através de proposições semânticas (do tipo, quanto menor isso...maior aquilo), representações externas (como gráficos, tabelas e diagramas, etc.) e modelos matemáticos. Um modelo matemático é um tipo de representação simbólica que faz uso de entes matemáticos como funções, vetores, etc. Em Física, de grande interesse são os modelos matemáticos que representam sistemas dinâmicos. Um modelo de sistema dinâmico pode ser entendido como um conjunto de relações matemáticas entre as grandezas que descrevem o sistema e o tempo, considerado como variável independente. Mas voltemos à idéia central de movimento.

2. Os conceitos de ponto material e sistema de referência

Quando dizemos que um corpo está em movimento, devemos explicitar em relação a que outro corpo, sua posição se altera à medida que o tempo passa. Vejamos um exemplo. Imagine um trem que se aproxima de uma estação onde alguns passageiros aguardam sentados. Em relação à estação, o trem está em movimento e os passageiros estão em repouso. Já em relação ao trem, tanto a estação quanto os passageiros estão em movimento. Nesse sentido, o conceito de movimento é relativo, ou seja, depende do corpo de referência adotado.

Como foi dito, a definição apresentada para movimento se baseia em conceitos pouco precisos. Tratemos de precisá-los. Para resolvermos esta dificuldade em relação ao corpo que se movimenta e ao corpo que serve de referência, introduziremos os conceitos de **ponto material** e de **sistema de referência**. Para tanto, suponha que estamos interessados em determinar o tempo que um ônibus leva para percorrer o trecho da Avenida Ipiranga, localizada na cidade de Porto Alegre, indicado na figura abaixo.

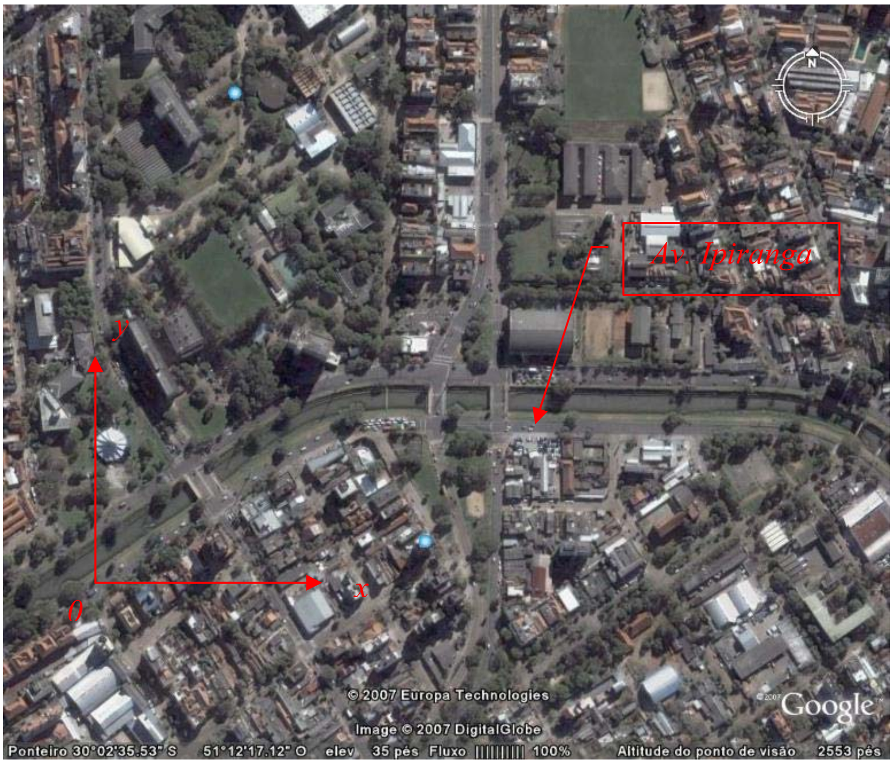


Figura 1. Um trecho da extensa Avenida Ipiranga, localizada na cidade de Porto Alegre, obtido com o *software* Google Earth. Os veículos que percorrem a avenida aparecem como pontos brancos na figura.

Como o trecho é muito maior do que o tamanho do ônibus, podemos desprezar as dimensões deste último e considerá-lo como um objeto pontual. Sempre que as dimensões do corpo em movimento puderem ser desprezadas, dizemos que o corpo se comporta como um ponto material. Esta idealização limita-nos ao estudo do movimento de translação de corpos rígidos. Neste caso, todas as partículas que constituem o corpo rígido sofrem o mesmo deslocamento e, por isso, podemos nos preocupar com o deslocamento de somente uma delas. Além disso, a figura mostra um sistema com dois eixos coordenados, x e y, cuja origem foi fixada num ponto da Terra escolhido arbitrariamente, de forma conveniente para estabelecer as coordenadas da posição do ônibus. Assim, desprezando as ondulações do terreno e a curvatura da Terra, podemos adotar um sistema de referência bidimensional para o estudo de qualquer movimento nessa região. Logo, *sistema de referência (ou referencial) é todo o sistema de coordenadas em relação ao qual se podem especificar as coordenadas da posição de um ponto material*. Antes de prosseguirmos na discussão de novos conceitos, redefinamos o conceito de movimento, agora, de modo mais preciso: *um ponto material está em movimento em relação a um dado referencial, quando sua posição varia no decorrer do tempo.*

3. O conceito de trajetória

Outro conceito que depende fundamentalmente do referencial adotado é o de **trajetória**. A trajetória de um corpo pode ser entendida como o caminho que ele percorreu durante sucessivos instantes de tempo, ao longo de seu movimento. Vejamos um exemplo. Imagine um pára-quedista que salta do interior de um avião. Se pudermos desprezar os efeitos de resistência do ar, enquanto o pára-quedas não se abre, do ponto de vista do piloto do avião, a trajetória do pára-quedista é aproximadamente retilínea e vertical. Já para um observador na Terra, a trajetória descrita pelo pára-quedista será parabólica. Assim, os conceitos de movimento, repouso e trajetória dependem do referencial adotado.

4. Os conceitos de deslocamento e distância percorrida

O conceito de **deslocamento** decorre da definição de movimento. Já o conceito de **distância percorrida**, decorre da definição de trajetória. Vejamos cada um deles, com base na figura abaixo.

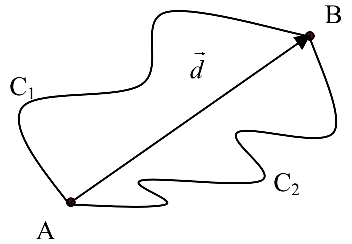


Figura 2. O deslocamento $\vec{d}$ de um corpo ao percorrer as trajetórias C_1 e C_2, entre os pontos *A* e *B*.

Suponha que um corpo partindo do ponto *A* alcance o ponto *B* ora pelo caminho C_1, ora pelo caminho C_2. O deslocamento do corpo, em ambos os casos, é o vetor $\vec{d}$ que une os dois pontos e só depende deles. Assim, dado um sistema de referência, a partir do qual se possa determinar a posição $\vec{x}_A$ do ponto *A* e a posição $\vec{x}_B$ do ponto *B*, definimos o deslocamento $\vec{d}$ como sendo:

$$\vec{d} = \vec{x}_B - \vec{x}_A \,,$$

onde o seu módulo $|\vec{d}|$ se mede em metros, no Sistema Internacional de Unidades (S.I.). Entretanto, as distâncias percorridas dependerão do comprimento de cada uma das trajetórias (caminhos 1 e 2). No caso particular em que a trajetória seja retilínea e não haja inversão no sentido de movimento, o módulo do deslocamento deverá coincidir com a distância percorrida pelo corpo.

5. Os conceitos de velocidade média e velocidade instantânea

A **velocidade média** é definida a partir do conceito de deslocamento. Ela informa a rapidez com que o corpo se desloca entre duas posições. Como exemplo, suponha que você caminhe uma quadra com 60 m de extensão, em linha reta, em 1 minuto. Logo, terá sofrido um deslocamento, em média, de 1 m a cada 1 s de caminhada. Diz-se, então, que sua velocidade média foi de 1 m/s. Isso não quer dizer que você tenha mantido esta velocidade ao longo de toda a quadra. Essa velocidade indica, apenas, que a cada 1 s de caminhada, você variou sua posição de 1 m. Logo, define-se a velocidade média como sendo a razão entre o deslocamento $\vec{d}$ e o intervalo de tempo Δt associado a este deslocamento:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{d}}{\Delta t},$$

onde o seu módulo $|\vec{v}_m|$ se mede em m/s, no S.I.

A definição de **velocidade instantânea**, ou simplesmente velocidade, é similar a de velocidade média. A diferença está no fato de que *Δt* é tomado como sendo infinitamente pequeno, isto é, o intervalo de tempo reduz-se a um instante de tempo. Logo, a velocidade média torna-se a velocidade naquele instante.

6. Os conceitos de aceleração média e aceleração instantânea

O conceito de **aceleração média** é definido a partir do conceito de velocidade. A aceleração média indica o quanto a velocidade de um corpo variou no intervalo de tempo correspondente. Vejamos o significado físico da aceleração média através de um exemplo. Suponha o movimento de um carro que durante sua arrancada possui uma aceleração média de 10 km/h/s. Essa aceleração indica que a velocidade instantânea, a velocidade indicada pelo velocímetro do carro, está variando, em média, 10 km/h a cada 1 s de movimento. Logo, seguindo este raciocínio, ao partir do repouso, o carro chegaria a uma velocidade de 10 km/h depois de 1 s, atingiria 20 km/h depois de 2 s, 30 km/h depois de 3 s, 40 km/h depois de 4 s, e assim por diante. Logo, define-se a aceleração média como sendo a razão entre a variação da velocidade $\Delta\vec{v}$ e o intervalo de tempo Δt correspondente

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0},$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade associada ao instante de tempo final t e $\vec{v}_0$ é a velocidade inicial associada ao instante de tempo inicial t_0. O módulo da aceleração média $|\vec{a}_m|$, no S.I., se mede em m/s/s ou simplesmente m/s^2.

O conceito de **aceleração instantânea**, ou simplesmente aceleração, é definido similarmente à aceleração média, com a diferença que *Δt* é tomado como sendo infinitamente pequeno, reduzindo-se a um instante de tempo. Logo, a aceleração média torna-se a aceleração naquele instante.

7. Um diagrama conceitual sobre a Cinemática

Como dito anteriormente, os conceitos apresentados até o momento constituem o arcabouço conceitual necessário para descrever o movimento dos corpos, do ponto de vista da Cinemática. Antes de avançarmos na discussão, vejamos um diagrama conceitual que procura dar uma visão panorâmica do campo conceitual da Cinemática.

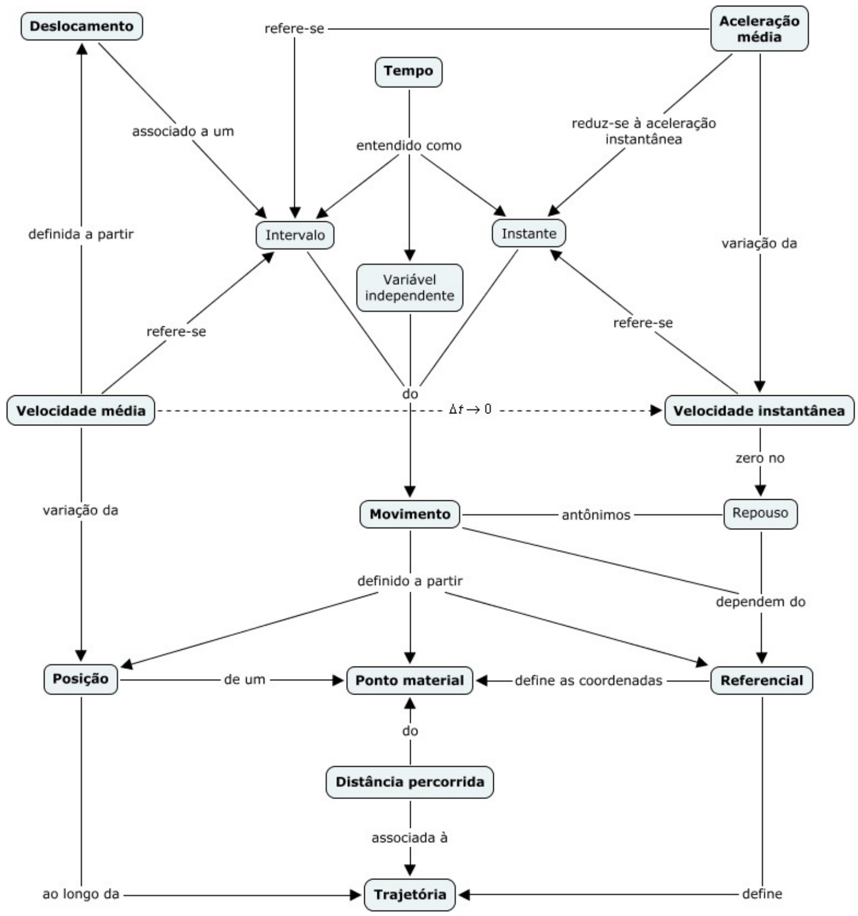


Figura 3. Um diagrama conceitual da Cinemática.

O diagrama conceitual acima tem por objetivo evidenciar algumas relações entre os conceitos necessários para a descrição do **movimento** dos corpos**.** Em Física, o conceito de movimento é definido a partir dos conceitos de **posição**, **ponto material** e **referencial**. Dessa forma, só é possível descrever a variação da posição de um ponto material, ao longo de sua **trajetória**, se tivermos adotado um referencial. A variação da posição é definida como sendo o **deslocamento**, que só é numericamente igual à **distância percorrida** quando o movimento é retilíneo e não inverte o seu sentido. O deslocamento, por sua vez, juntamente com o **intervalo** de **tempo** correspondente, define a **velocidade média** do movimento. Contudo, se quisermos obter informações sobre a velocidade num **instante** qualquer do movimento, devemos tomar o limite em que $\Delta t \to 0$, de modo a calcular a **velocidade instantânea** do ponto material naquele instante. Quando a velocidade for nula, o ponto material estará em **repouso**. Por fim, em movimentos uniformemente variados (acelerados), a grandeza física que mede a taxa de variação da velocidade no tempo, considerado em toda a Cinemática como **variável independente**, é a **aceleração média**.

8. Algumas simplificações para estudar os movimentos

Dependendo do tipo de movimento, estudá-lo pode ser uma tarefa demasiada complicada. Trajetórias bi e tridimensionais, por exemplo, exigem uma notação vetorial um pouco mais complexa. Para facilitar nossa abordagem à Cinemática, faremos algumas simplificações quanto às trajetórias descritas pelos corpos, o que acabará por reduzir nosso estudo a um número limitado de situações. Iremos considerar somente trajetórias retilíneas, em outros termos, apenas movimentos unidimensionais. Esta restrição torna possível a utilização de apenas um eixo coordenado como sistema de referência, o que simplifica consideravelmente o estudo de um movimento na medida em dispensaremos a notação vetorial. Ou seja, faremos um estudo da Cinemática escalar, como veremos a seguir.

9. O movimento retilíneo uniforme

Movimentos que se realizam ao longo de trajetórias retilíneas não são comuns. As grandes retas das estradas dificilmente correspondem a trajetórias retilíneas. Elas quase sempre possuem desníveis que acabamos não considerando. Na verdade, a maioria dos corpos que se movem próximos à superfície da Terra não descreve trajetória retilínea. Menos freqüentes, ainda, são os movimentos que além de descreverem trajetória retilínea, o fazem com velocidade constante. O movimento retilíneo uniforme (MRU) é o movimento mais simples e menos freqüente que existe na natureza. Vejamos algumas situações em que se pode observar este tipo de movimento. Uma esfera metálica abandonada dentro de um tubo contendo óleo na vertical, cai com velocidade aproximadamente constante. O movimento de queda das gotas de chuva se realiza com velocidade constante passado certo tempo do seu início. O movimento de uma pessoa numa escada rolante, subindo ou descendo, também ocorre com velocidade constante.

Assim, quando o corpo se move em uma trajetória retilínea e com velocidade constante, o seu movimento é retilíneo uniforme. A única grandeza física que varia com o tempo é a posição. Em conseqüência, estudar o MRU resume-se ao estudo da variação da posição do corpo em função do tempo. Como exemplo, suponha que você esteja dirigindo um carro, em linha reta, com velocidade de 60 km/h. Nestas condições, o carro irá percorrer 60 km a cada hora. Logo, após 1 hora de movimento o carro percorrerá 60 km, após 2 horas percorrerá 120 km, após 3 horas percorrerá 180 km, e assim por diante. Ou seja, o carro percorrerá *distâncias iguais em intervalos de tempo iguais*. Tratemos de expressar estas idéias em linguagem matemática.

Suponha que um carro esteja percorrendo, com velocidade constante, uma trajetória retilínea. A figura 4 representa a situação de forma esquemática. Nela, está indicado um eixo coordenado com origem em *O* que serve de referência para determinar as posições do carro em cada instante de tempo.

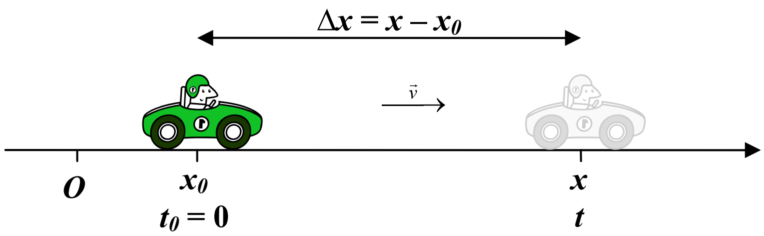


Figura 4. Uma representação esquemática do movimento de um carro, com velocidade constante, numa trajetória retilínea.

Ao longo do eixo coordenado, estão indicadas as posições x_0, que corresponde ao instante de tempo t_0, e x que corresponde ao instante de tempo t. A diferença $x - x_0$ é o deslocamento Δx durante o intervalo de tempo $\Delta t = t - t_0$. Em geral, se admite $t_0 = 0$. Na prática, isso corresponde a zerar o cronômetro no momento que se inicia a contagem do movimento. Logo, com base na figura acima, é possível verificar que:

$$x = x_0 + \Delta x \, .$$

Porém, o movimento retilíneo uniforme é aquele no qual a velocidade em qualquer instante de tempo é constante e diferente de zero. Assim, a velocidade do carro em qualquer instante de tempo é igual a sua velocidade média ao longo de todo o movimento. Logo:

$$v = v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \, ,$$

e isolando Δx na equação acima, temos que:

$$\Delta x = v_m \Delta t = v \Delta t \, .$$

Substituindo Δx na primeira equação, tem-se que, fazendo $t_0 = 0$:

$$x = x_0 + vt \, .$$

A expressão acima é conhecida como a função horária do movimento retilíneo uniforme. Nela, os valores constantes são a posição inicial x_0 e a velocidade v. A posição x varia linearmente com o tempo t. Assim, esta função permite determinar para cada instante de tempo t o correspondente valor da posição x do ponto material ao longo da sua trajetória e, vice-versa, conhecendo a posição do ponto material, determinar o correspondente instante de tempo.

10. O movimento retilíneo uniformemente variado

Embora alguns movimentos observados na natureza sejam aproximadamente uniformes, é fácil constatar que a maioria dos corpos adquire movimento com uma velocidade que varia com o passar do tempo. Estes movimentos são denominados de acelerados ou variados. Aqui, nos restringiremos às situações em que esta variação se processa de maneira uniforme, ou seja, em que a *velocidade do corpo aumenta (ou diminui) da mesma intensidade em intervalos de tempos iguais*. A arrancada de um carro, o movimento de uma bola que rola ladeira abaixo, a freada de um automóvel, a queda de uma pedra e muitos outros movimentos podem ser considerados variados. Como foi visto, a grandeza física que descreve a variação da velocidade num certo intervalo de tempo é a aceleração. Ela indica a rapidez com que a velocidade do ponto material varia com o passar do tempo. Vejamos como ficam estas idéias expressas em linguagem matemática.

10.1. A velocidade em função do tempo

A figura 5 ilustra de forma esquemática o movimento, numa trajetória retilínea, de um carro que se move com aceleração constante.

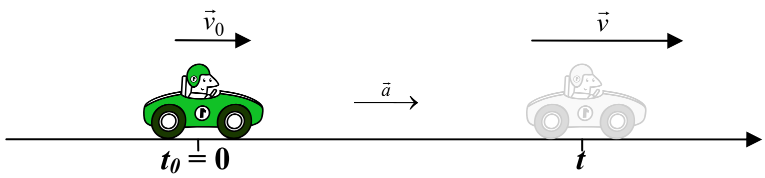


Figura 5. Uma representação esquemática de um carro que se move com aceleração constante.

Ao longo do eixo coordenado são mostrados o instante inicial $t_0 = 0$, que corresponde à velocidade inicial v_0, e o final t, que corresponde à velocidade final v. A diferença $v - v_0$ é a variação da velocidade Δv durante o intervalo de tempo $\Delta t = t - t_0$. Porém, o movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV) é aquele no qual a aceleração em qualquer instante de tempo é constante e diferente de zero. Assim, a aceleração do carro em qualquer instante de tempo é igual a sua aceleração média ao longo do movimento. Logo:

$$a = a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}.$$

Isolando v na equação acima, e fazendo $t_0 = 0$:

$$v = v_0 + at.$$

Na expressão acima, os valores constantes são a velocidade inicial v_0 e a aceleração a. Logo, a velocidade v varia linearmente com o tempo t. Esta função permite determinar para cada instante de tempo t, o correspondente valor da velocidade v do ponto material ao longo da sua trajetória e, vice-versa, conhecendo a velocidade do ponto material, determinar o correspondente instante de tempo.

10.2. A posição em função do tempo

A posição de um ponto material em MRUV varia com o quadrado do tempo segundo a expressão abaixo:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$

onde x_0 e v_0 são, respectivamente, a posição inicial e a velocidade inicial no instante t_0 e a é a aceleração (constante) a que está submetido o ponto material. Justificaremos a forma desta expressão mais tarde, quando interpretaremos a área abaixo da curva no gráfico $v \times t$ para o movimento acelerado. Fixados os parâmetros x_0, v_0 e a que definem o movimento acelerado, a expressão acima permite determinar para qualquer instante de tempo, a posição do ponto material. Por isso, é denominada a função horária do MRUV.

10.3. A velocidade em função da posição

Combinando as expressões para a velocidade e para a posição em função do tempo, de modo que a expressão resultante não dependa da variável t, temos:

$$v^2 = v^2{}_0 + 2a(x - x_0),$$

onde x_0, v_0 e a são parâmetros. A partir desta expressão é possível determinar a velocidade v para qualquer posição x da trajetória e, vice-versa, determinar a posição do ponto material em função da sua velocidade. A expressão acima é conhecida como a “equação de Torricelli”.

11. O movimento de queda livre

A Cinemática consiste numa abordagem teórica ao estudo do movimento dos corpos. Sua formulação remonta a Galileu (1564 – 1642) quando, interessado em descrever a trajetória de projéteis e a queda dos corpos, estudou o movimento uniforme (velocidade constante) e o movimento uniformemente variado (aceleração constante). Galileu acreditava que todos os corpos, independentemente do seu peso, caíam da mesma forma, isto é, adquiriam a mesma velocidade em cada instante de tempo, se abandonados da mesma altura num meio cuja resistência fosse nula, ou seja, no vácuo. Esta hipótese contradizia a teoria de Aristóteles sobre o movimento, segundo a qual: um corpo massivo cairia *mais* depressa que outro *menos* massivo. A fim de refutar a teoria aristotélica, Gonçalves e Toscano sugerem que Galileu parece ter adotado o seguinte raciocínio:

> *"...deixando cair dois objetos de massas diferentes, segundo Aristóteles, o mais "pesado" adquire maior valor de velocidade. Unindo os dois, o mais rápido será parcialmente retardado pelo mais lento e este, por sua vez, será acelerado pelo mais "pesado". Como exemplo, tomem-se duas pedras: uma grande, que se move com módulo de velocidade 5,0 m/s, e uma menor, que se move com velocidade em módulo 2,0 m/s. Quando unidas, as duas se moverão com uma velocidade de módulo menor que 5,0 m/s e maior que 2,0 m/s. Portanto, um objeto mais "pesado" (as duas pedras juntas) move-se com módulo de velocidade menor que o de um mais "leve", quando deveria cair com uma velocidade ainda maior."* (GONÇALVES E TOSCANO, 1997: 265-266)

A partir das suas experiências de pensamento e dos experimentos realizados com objetos abandonados do alto de planos inclinados, Galileu formulou dois enunciados sobre o movimento de queda livre (sem resistência do ar) dos corpos que podem ser resumidos da seguinte forma:

a) um corpo que cai a partir do repouso adquire, em tempos iguais, variações iguais de velocidade;

b) a distância percorrida por um corpo que cai a partir do repouso é proporcional ao quadrado do tempo gasto para percorrê-lo.

Como mostram as idéias de Galileu, o movimento de queda livre (MQL) é um movimento retilíneo uniformemente acelerado na direção vertical. Logo, as equações que descrevem um MQL são as mesmas que descrevem um MRUV na direção horizontal. A única diferença está no fato de que no MQL o sistema de referência passa a ser um eixo coordenado na direção vertical que aponta, normalmente, para cima. Além disso, no MQL o módulo da aceleração a que fica submetido o ponto material é sempre conhecido e na Terra vale aproximadamente 9,8 m/s^2.

12. Análise gráfica dos movimentos

Até aqui, estivemos preocupados em analisar os movimentos retilíneos nas direções horizontal e vertical, sejam eles uniformes ou acelerados, por meio de relações matemáticas entre as grandezas que descrevem o movimento do corpo e o tempo, considerado como variável independente. Outro tipo de análise extremamente útil do movimento é o seu estudo gráfico. Gráficos armazenam uma grande quantidade de informações e permitem uma visão geral do comportamento das grandezas envolvidas na descrição dos movimentos. Iniciemos nossa análise gráfica pelo estudo dos gráficos do MRU.

12.1 Estudo gráfico do MRU

12.1.1. Estudo do gráfico $x \times t$

No MRU, a única grandeza cinemática que varia em função do tempo é a posição do ponto material. Como o movimento ocorre com velocidade constante v, a posição x depende linearmente do tempo t. Os gráficos $x \times t$ da figura 6 mostram duas situações possíveis para o MRU.

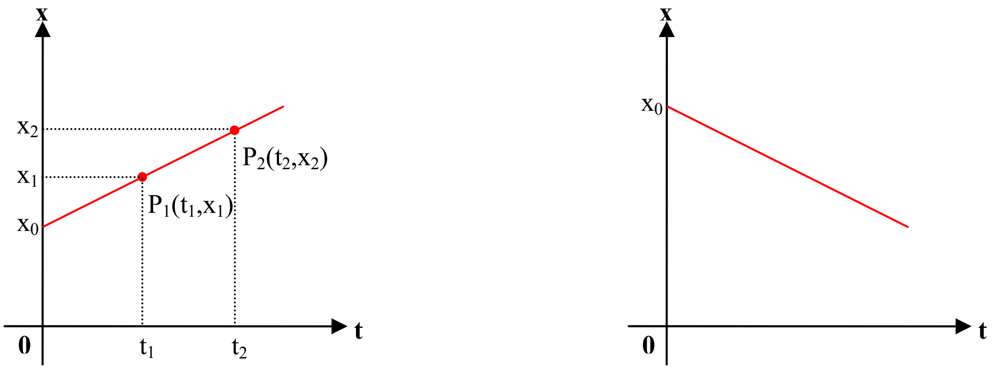


Figura 6. À esquerda, o gráfico $x \times t$ representando um MRU com velocidade positiva. À direita, o gráfico $x \times t$ representando um MRU com velocidade negativa.

Em ambos os gráficos $x \times t$ da figura 6, o ponto onde a reta (vermelha) corta o eixo das ordenadas (eixo das posições) representa a posição inicial x_0 do movimento, no instante $t = 0$. No gráfico à esquerda, a partir desta posição inicial, o movimento ocorre no sentido crescente do eixo das posições, indicando um deslocamento Δx positivo e, conseqüentemente, uma velocidade positiva. Já no gráfico à direita, o movimento ocorre no sentido contrário. Logo, o ponto material se desloca no sentido decrescente do eixo das posições, o que resulta num movimento com velocidade negativa. Para calcular o valor da velocidade, basta determinar o coeficiente angular m da reta, a partir de dois pontos quaisquer da mesma, como $P_1(t_1, x_1)$ e $P_2(t_2, x_2)$ no gráfico à esquerda da figura acima. O coeficiente angular é numericamente igual à velocidade do ponto material, visto que:

$$m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = v\ .$$

Vejamos um exemplo de análise do gráfico $x \times t$ para o MRU. O gráfico da posição versus tempo para dois objetos A e B, em movimento ao longo de uma mesma direção, é mostrado abaixo.

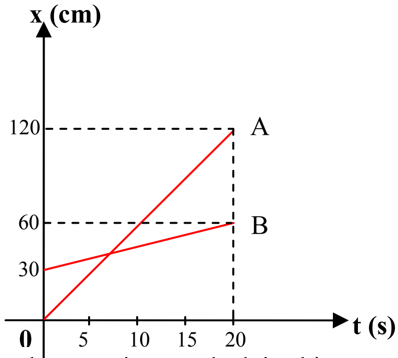


Figura 7. O gráfico $x \times t$ representando o movimento de dois objetos ao longo da mesma direção.

Considerando um sistema de referência que aponta para a direita, vê-se que o objeto *A* inicia seu movimento da origem, isto é, da posição $x_0 = 0$. Já o objeto *B* inicia seu movimento da posição $x_0 = 30$ cm. Durante os primeiros 20 s de movimento, enquanto o objeto *A* sofre um deslocamento de 120 cm, o objeto *B* desloca-se de 30 cm. Logo, a velocidade de *A* é maior do que a de *B*. Este fato pode ser observado, também, pela inclinação das retas que representam os dois movimentos. Quanto maior for a inclinação da reta no gráfico $x \times$ t, maior será a velocidade do corpo. Do gráfico acima, também é possível ver que a velocidade do objeto *A* vale 6 cm/s, enquanto a velocidade do objeto *B* é de 1,5 cm/s. Além disso, é possível verificar que no instante de tempo próximo a 7,5 s, os dois objetos se encontram na mesma posição.

12.1.2. Estudo do gráfico $v \times t$

Os gráficos $v \times t$ da figura 8 representam as duas situações possíveis para o movimento de um ponto material ao longo de uma trajetória retilínea com velocidade constante.

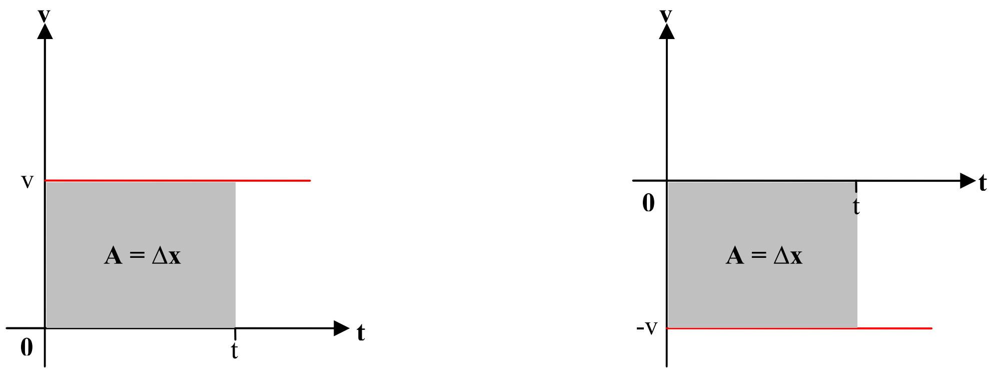


Figura 8. À esquerda, o gráfico $v \times t$ representando um MRU com velocidade positiva. À direita, o gráfico $v \times t$ representando um MRU com velocidade negativa.

Em ambos os gráficos da figura 8, a reta que representa os valores da velocidade é paralela ao eixo dos tempos, indicando que o movimento ocorre com velocidade constante. No gráfico à esquerda, a reta encontra-se acima do eixo dos tempos, indicando uma velocidade positiva. Já no gráfico à direita, a reta encontra-se abaixo do eixo dos tempos, indicando uma velocidade negativa. Além disso, a partir do gráfico $v \times t$ é possível extrair informações sobre o deslocamento do ponto material durante o intervalo de tempo considerado. A área compreendida entre a reta (vermelha) e o eixo dos tempos, limitada lateralmente pelos instantes de tempos considerados, é numericamente igual ao deslocamento do ponto material, visto que, para os casos acima:

$$A = bh = (t - t_0)v = \Delta x \ .$$

Vejamos um exemplo de análise do gráfico $v \times t$ para o MRU. O gráfico da velocidade versus tempo, mostrado na figura 9, representa o movimento de um corpo ao longo de uma trajetória retilínea.

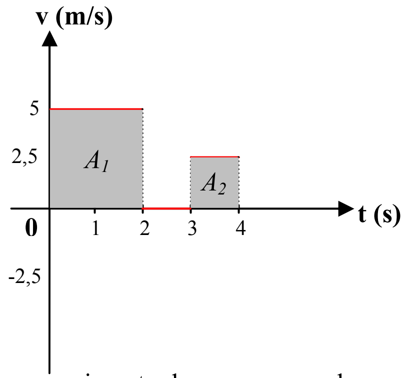


Figura 9. O gráfico $v \times t$ representando o movimento de um corpo ao longo de uma trajetória retilínea.

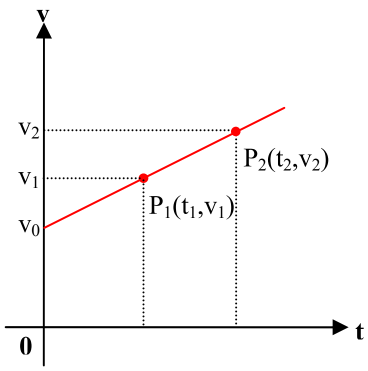
Considerando um sistema de referência que aponta para a direita, vê-se do gráfico acima que o corpo movimenta-se, durante os primeiros 2 s, no sentido crescente das posições com velocidade de 5 m/s. Seu deslocamento neste intervalo de tempo é numericamente igual a A_1. Após, o corpo pára por 1 s, como indica o segmento de reta (vermelha) sobre o eixo dos tempos. Em seguida, volta a mover-se no mesmo sentido com velocidade de 2,5 m/s. Neste intervalo de tempo, seu deslocamento é igual a A_2. Logo, o deslocamento que o corpo sofreu, durante os primeiros 4 s de movimento, corresponde a soma algébrica das áreas indicadas no gráfico

$$\Delta x = A_{total} = A_1 + A_2 = b_1 h_1 + b_2 h_2 = 10\,m + 2{,}5\,m = 12{,}5\,m$$

12.2. Estudo gráfico do MRUV

12.2.1. Estudo do gráfico $v \times t$

No MRUV, tanto a posição quanto a velocidade do ponto material variam com o tempo. Como o movimento ocorre com aceleração constante a, a velocidade v depende linearmente do tempo. Os gráficos $v \times t$ da figura 10 mostram duas situações possíveis para o MRUV.



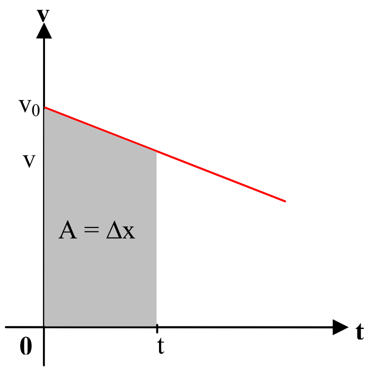


Figura 10. À esquerda, o gráfico $v \times t$ representando um MRUV com velocidade positiva. À direita, o gráfico $v \times t$ representando um MRUV com velocidade negativa.

Em ambos os gráficos $v \times t$ da figura 10, o ponto onde a reta corta o eixo das ordenadas (eixo das velocidades) representa a velocidade inicial v_0 do movimento, no instante $t = 0$. No gráfico à esquerda, o movimento ocorre no sentido crescente do eixo das velocidades, indicando uma variação da velocidade Δv positiva e, conseqüentemente, uma aceleração positiva. Já no gráfico à direita, o ponto material se movimenta com velocidade cada vez menor, o que resulta numa aceleração negativa. Para calcular o valor da aceleração, basta determinar o coeficiente angular m da reta, a partir de dois pontos quaisquer da mesma, como $P_1(t_1, v_1)$ e $P_2(t_2, v_2)$ no gráfico à esquerda da figura acima. O coeficiente angular é numericamente igual à aceleração do ponto material, visto que:

$$m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = a\ .$$

Além disso, se extrapolarmos o traçado da reta no gráfico à direita, é possível determinar o instante de tempo em que o ponto material tem velocidade nula. E, da mesma forma que no MRU, a área compreendida entre a reta e o eixo dos tempos, limitada pelos instantes de tempo considerados, é numericamente igual ao deslocamento do ponto material, tal que:

$$A = \frac{(B + b)h}{2} = \frac{(v + v_0)t}{2} = \Delta x\ .$$

Como $\Delta x = x - x_0$ e $v = v_0 + at$, a equação acima pode ser reescrita na forma:

$$\frac{(v_0 + at + v_0)t}{2} = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2\ .$$

A última expressão obtida é a função horária do MRUV. Vejamos, então, um exemplo de análise do gráfico $v \times t$ do MRUV. O gráfico da velocidade versus tempo, mostrado na figura 11, representa o movimento de um corpo ao longo de uma trajetória retilínea.

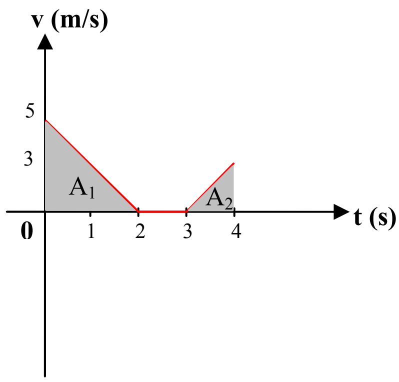


Figura 11. O gráfico $v \times t$ para o movimento de um corpo ao longo de uma trajetória retilínea.

Considerando um sistema de referência que aponta para direita, o gráfico acima representa o movimento de um corpo que, durante os primeiros 2 s, sofre uma aceleração de -2,5 m/s^2. Seu deslocamento nesse intervalo de tempo é numericamente igual a A_1. Embora esteja submetido a uma aceleração negativa, a velocidade do corpo se mantém positiva, resultando num deslocamento para a direita de 7,5 m. No terceiro segundo de movimento, o corpo permanece em repouso. Já no quarto segundo, o corpo volta a sofrer uma aceleração, agora, de 3 m/s^2. Nesse último segundo, o seu deslocamento pode ser determinado pelo cálculo de A_2, e vale 1,5 m. Logo, ao fim dos primeiros 4 segundos de movimento, seu deslocamento foi de 9 m.

12.2.2. Estudo do gráfico $a \times t$

Os gráficos $a \times t$ da figura 12 representam as duas situações possíveis para o movimento de um ponto material ao longo de uma trajetória retilínea com aceleração constante.

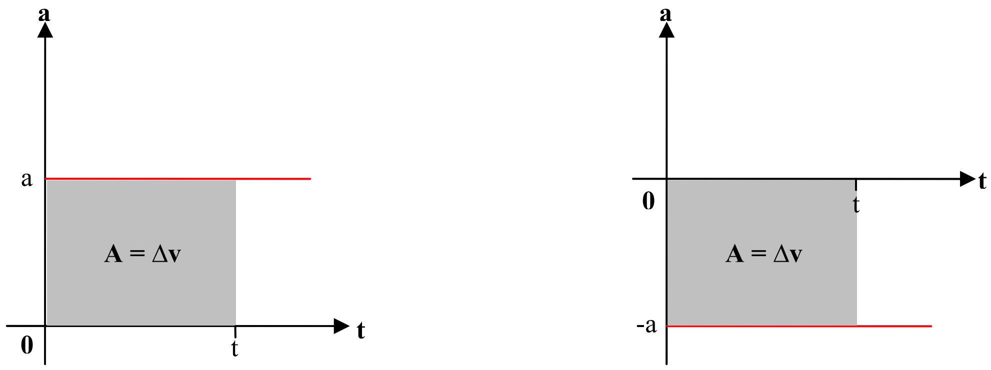


Figura 12. À esquerda, o gráfico $a \times t$ representando um MRUV com aceleração positiva. À direita, o gráfico $a \times t$ representando um MRUV com aceleração negativa.

Em ambos os gráficos da figura 12, a reta que representa os valores da aceleração é paralela ao eixo dos tempos, indicando que o movimento ocorre com aceleração constante. No gráfico à esquerda, a reta encontra-se acima do eixo dos tempos, indicando uma aceleração positiva. Já no gráfico à direita, a reta encontra-se abaixo do eixo dos tempos, indicando uma aceleração negativa. Além disso, a partir do gráfico $a \times t$ é possível extrair informações sobre a variação da velocidade do ponto material durante o intervalo de tempo considerado. A área compreendida entre a reta e o eixo dos tempos, limitada lateralmente pelos instantes de tempos considerados, é numericamente igual à variação da velocidade do ponto material, visto que, para os casos acima:

$$A = bh = (t - t_0)a = \Delta v \, .$$

Vejamos um exemplo de análise do gráfico $a \times t$ para o MRUV. O gráfico da aceleração versus tempo, mostrado na figura 13, ilustra o movimento de um corpo ao longo de uma trajetória retilínea.

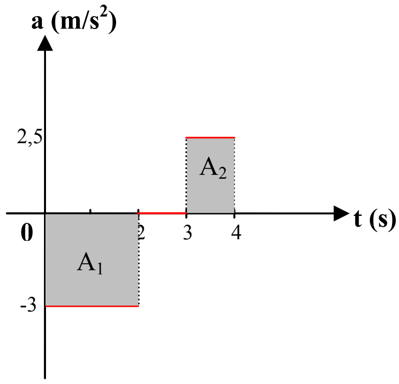


Figura 13. O gráfico $a \times t$ para o movimento de um corpo ao longo de uma trajetória retilínea.

Considerando um sistema de referência que aponta para a direita, o gráfico acima representa o movimento de um corpo que sofre, durante os primeiros 2 s, uma aceleração constante de -3 m/s. Neste intervalo de tempo, a variação da velocidade corresponde a área A_1, e vale -6 m/s. No terceiro segundo de movimento a velocidade do corpo se mantém constante, pois o gráfico indica uma aceleração nula. Em seguida, o corpo adquire uma aceleração constante de 2,5 m/s^2. Neste intervalo de tempo, a variação da velocidade corresponde à área A_2, e vale 2,5 m/s. Logo, ao longo de todo o movimento a variação total da velocidade do corpo pode ser calculada pela soma algébrica das áreas A_1 e A_2, e vale -3,5 m/s.

12.2.3. Estudo do gráfico $x \times t$

No MRUV, a função matemática que relaciona a posição do ponto material com o tempo é a função quadrática (ou de segundo grau). Os gráficos da figura 14 mostram as duas situações possíveis para o MRUV.

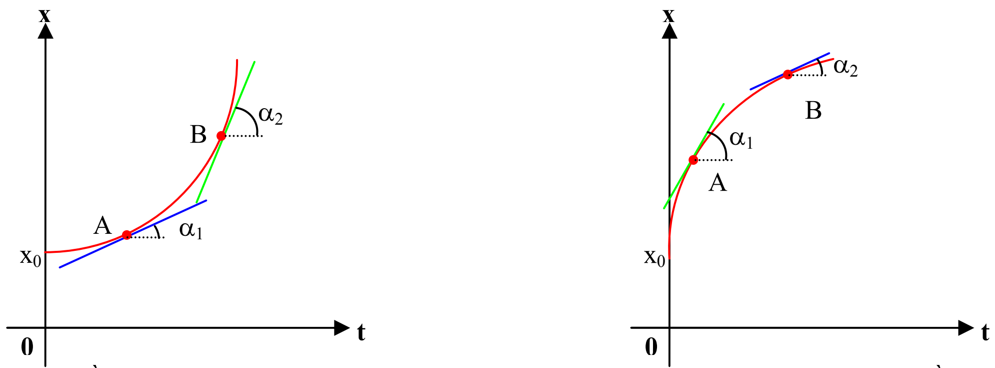


Figura 14. À esquerda, o gráfico $x \times t$ representando um MRUV com aceleração positiva. À direita, o gráfico $x \times t$ representando um MRUV com aceleração negativa.

Em ambos os gráficos $x \times t$ da figura 14, o ponto onde a parábola corta o eixo das ordenadas (eixo das posições) representa a posição inicial x_0 do movimento, no instante $t = 0$. No gráfico à esquerda, a parábola tem concavidade para cima. Os coeficientes angulares das retas tangentes à parábola nos pontos A e B são numericamente iguais às velocidades nestes pontos. Como $\alpha_2 > \alpha_1$, a velocidade no ponto B é maior do que no ponto A, indicando uma variação da velocidade Δv positiva e, conseqüentemente, uma aceleração a positiva. Já no gráfico à direita, a concavidade da parábola é para baixo. E, como $\alpha_1 > \alpha_2$, a velocidade no ponto A é maior do que no ponto B, indicando uma variação da velocidade Δv negativa e, conseqüentemente, uma aceleração a negativa.

Vejamos um exemplo de análise do gráfico $x \times t$ para o MRUV. O gráfico da posição versus tempo, mostrado na figura 15, representa o movimento de um corpo em trajetória retilínea.

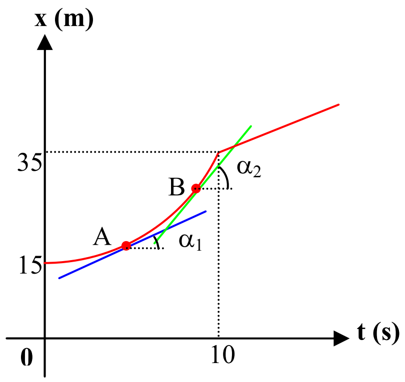


Figura 15. O gráfico $x \times t$ representando o movimento de um corpo ao longo de uma trajetória retilínea.

Considerando um sistema de referência que aponta para a direita, o gráfico acima representa o movimento de um corpo que partindo do repouso (reta tangente paralela ao eixo dos tempos no ponto de abscissa igual a zero) adquire uma aceleração constante positiva durante os primeiros 10 s. A partir do instante t = 10 s, o movimento ocorre com velocidade constante, representado pelo segmento de reta (vermelha) na figura acima. Do gráfico também é possível obter informação a respeito da velocidade média do corpo durante os 10 s iniciais do movimento. Partindo da posição inicial x_0 = 15 m, o corpo se desloca, neste intervalo de tempo, até a posição x = 35 m. Logo, seu deslocamento nos primeiros 10 s foi de 20 m e sua velocidade média de v_m de 2 m/s.

13. Considerações finais

No processo de teorização da realidade é possível seguir por um entre dois "caminhos teóricos", a saber: (a) pode-se desejar construir teorias do tipo caixa translúcida, em que se opta por uma descrição detalhada e profunda de alguns aspectos da realidade, mediante a introdução de variáveis hipotéticas, de modo a explicitar os mecanismos mais internos (não observáveis) dos sistemas físicos; ou (b) pode-se desejar construir teorias do tipo caixa-negra, onde a escolha é por uma abordagem mais direta, isto é, mais próxima dos dados empíricos e que faz uso somente de variáveis externas (observáveis) do tipo entrada e saída (E-S), de modo a descrever o comportamento global do sistema físico (Bunge, 1974). Neste texto, optamos em seguir pelo segundo caminho no estudo dos movimentos, ou seja, pela Cinemática em vez da Dinâmica. A Cinemática é tipicamente uma teoria do tipo caixa-negra enquanto a Dinâmica é um exemplo de teoria do tipo caixa translúcida. Tanto a Cinemática quanto Dinâmica pronunciam-se sobre os mesmos fenômenos de interesse. Enquanto a Cinemática descreve o comportamento do sistema somente com base em variáveis do tipo entrada (tempo) e saída (posição, velocidade e aceleração), a Dinâmica procura inferir sobre as causas do movimento, ou seja, as forças responsáveis pelo estado de variação do movimento.

14. Referências

[1] ARAUJO, I. S; VEIT, E. A.; MOREIRA, M. A. Atividades de modelagem computacional no auxílio à interpretação de gráficos da Cinemática. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 26, n. 2, p. 179-184, 2004.

[2] BUNGE, M. *Teoria e realidade*. São Paulo: Perspectiva, 1974. 243 p.

[3] GASPAR, A. *Física. Mecânica*. Vol. 1. São Paulo: Ática, 2000. 384 p.

[4] GONÇALVES F. A. e TOSCANO, C. *Física e realidade.* Vol. 1. São Paulo: Scipione, 1997. 367 p.